CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1978

•

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES (Epreuve B)

Durée : 4 heures

Vendredi 5 mai 1978 de 8 heures à 12 heures

•

Toutes les quantités intervenant dans le problème sont réelles.

Notations. On désignera par $\{a, b, c, \ldots, l\}$ l'ensemble dont les éléments sont les réels $a, b, c, \ldots, l$. La notation $\{a\}$ désignera ainsi l'ensemble dont l'unique élément est a.

f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E un ensemble de réels, on désignera par f (E) l'ensemble des réels obtenus en appliquant f à tous les éléments de E. On appellera image réciproque de E par f et on désignera par f^{-1} (E) l'ensemble de tous les réels dont les images par f appartiennent à E.

— I —

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1;3\} \quad x \longrightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 4x + 3}$$

1°) Construire la courbe représentative de $f(x)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé.

2°) Montrer que $f^{-1}\left(\{r\}\right)$ où $r \in \mathbb{R}$ comporte en général deux éléments. Précisez le ou les cas d'exception.

3°) Montrer que $f^{-1}\left(\{f(a)\}\right)$ où $a \in \mathbb{R} - \{1;3\}$ comporte en général deux éléments ; les calculer en fonction de a. Préciser le ou les cas d'exception.

— II —

On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1;3\} \quad x \longrightarrow g(x) = \sup\left[f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)\right]$$

1°) Montrer que g est partout définie pour $x \neq 1$ et $x \neq 3$ et qu'elle peut se prolonger par continuité en une fonction $\overline{g}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

.../...

2°) Etudier la continuité, la dérivabilité de la fonction $\overline{g}$ ainsi obtenue. Construire sa courbe représentative.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose

$$a_n = \overline{g}(n+1)$$

et on considère la série entière en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

a) Quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

b) Quel est son domaine de convergence ?

c) Calculer sa somme (en fonction de x) pour $|x| < 1$.

4°) On pose maintenant $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\overline{g}\left(\frac{n}{4}+2\right) - \frac{11}{8}}$$

et on considère la série entière en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

a) Quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

b) Quel est son domaine de convergence ?

c) La convergence est-elle uniforme sur $\left]-1\,;\,+1\right[$? sur $\left]-1\,;\frac{1}{2}\right]$?
(toute affirmation non démontrée ne sera pas prise en considération)

d) Expliciter, pour $0 < x < 1$, la somme de la série.

5°) Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$c_n = \sin\left[\pi\left(n+\frac{13}{4}\right)\right]$$

et on envisage la série entière en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Calculer (en fonction de x) la somme de cette série pour $|x| < 1$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail